

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие . . . . .	7
<b>ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОГО ПЕРЕМЕННОГО. ПРЕДЕЛЫ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ И ФУНКЦИЙ. ОБЩЕЕ ПОНЯТИЕ ФУНКЦИИ</b>	
<i>(В. Л. Гончаров)</i>	
<b>Глава I. Общие сведения об элементарных функциях и графиках уравнений . . . . .</b>	<b>11</b>
§ 1. Элементарные функции . . . . .	11
2. Графические представления. Приёмы точечных построений . .	17
3. Простейшие преобразования графиков . . . . .	25
4. Прямая и обратная функции . . . . .	32
§ 5. Элементарное исследование функций (постановка вопроса и некоторые общие приёмы) . . . . .	34
<b>Глава II. Обзор элементарных функций и их графиков . . . . .</b>	<b>41</b>
§ 6. Классификация рациональных функций . . . . .	41
7. Целые положительные степени . . . . .	42
8. Многочлены первой степени (линейные функции) . . . . .	45
9. Многочлены (трёхчлены) второй степени . . . . .	46
10. Многочлены третьей степени . . . . .	48
11. Биквадратные многочлены . . . . .	51
12. Многочлены высших степеней . . . . .	52
13. Целые отрицательные степени . . . . .	54
14. Дробные линейные функции . . . . .	56
15. Дробные функции второй степени . . . . .	58
16. Дробные рациональные функции (общий случай) . . . . .	64
17. Алгебраические иррациональные функции . . . . .	66
18. Примеры исследования алгебраических функций . . . . .	68
19. Элементарные трансцендентные функции . . . . .	78
20. Показательная функция . . . . .	78
21. Функции, связанные с показательной . . . . .	84
22. Логарифмическая функция . . . . .	88
23. Функции, связанные с логарифмической . . . . .	90
24. Произвольная степенная функция . . . . .	93
§ 25. Основные (целые) тригонометрические функции: синус и косинус . . . . .	95
§ 26. Простые гармонические колебания . . . . .	101
27. Тригонометрические многочлены . . . . .	105
28. Многочлены Чебышева . . . . .	107
§ 29. Тангенс и другие дробные тригонометрические функции . . .	111

§ 30.	Представление функций, рационально зависящих от тригонометрических, через одну или две из них . . . . .	116
§ 31.	Примеры исследования функций, рационально зависящих от тригонометрических. Тригонометрические уравнения . . . . .	121
§ 32.	Обратные тригонометрические функции . . . . .	128
§ 33.	Исследование многочленов Чебышева. Их минимальное свойство . . . . .	134
<b>Глава III. Пределы числовых последовательностей и пределы функций . . . . .</b>		<b>140</b>
§ 34.	Конечные и бесконечные числовые последовательности . . . . .	140
§ 35.	Общее определение бесконечной числовой последовательности . . . . .	149
§ 36.	Теорема Больцано-Вейерштрасса о существовании предельной точки . . . . .	153
§ 37.	Примеры. Предел как единственная предельная точка . . . . .	159
§ 38.	Предел последовательности: классическое определение и основные свойства . . . . .	165
§ 39.	Обобщение понятия предела (пределы в «несобственном смысле») . . . . .	173
§ 40.	Предел функции на бесконечности . . . . .	176
§ 41.	Односторонний предел функции в конечной точке . . . . .	180
§ 42.	Двусторонний предел. Понятие непрерывности . . . . .	187
§ 43.	Примеры непрерывных функций . . . . .	190
§ 44.	Пределы при монотонном изменении. Число $e$ . . . . .	195
<b>Глава IV. Пределы последовательностей функций. Свойства непрерывных функций . . . . .</b>		<b>202</b>
§ 45.	Простая сходимость . . . . .	202
§ 46.	Общее понятие функции одной действительной переменной . . . . .	210
§ 47.	Свойства непрерывных функций . . . . .	215
§ 48.	Равномерная сходимость последовательности непрерывных функций . . . . .	222
§ 49.	Теорема Вейерштрасса-Бернштейна о приближении непрерывной функции с помощью рациональных многочленов . . . . .	227
§ 50.	Доказательство теоремы . . . . .	232
§ 51.	Определение показательной функции. Продолжение непрерывной функции за пределы всюду плотного множества . . . . .	237
§ 52.	Теорема Больцано и проблема существования однозначной обратной функции . . . . .	244
§ 53.	Функциональные уравнения и элементарные функции . . . . .	247
<b>Глава V. Общее понятие функции . . . . .</b>		<b>254</b>
§ 54.	Соответствие между множествами . . . . .	254
§ 55.	Геометрические образы в многомерных пространствах . . . . .	256
§ 56.	Пространственные отображения . . . . .	260
§ 57.	Метрические пространства . . . . .	264
§ 58.	Понятие предела в метрическом пространстве . . . . .	268
§ 59.	Топологические пространства . . . . .	272
§ 60.	Алгебра множеств. Производное множество. Замкнутость и связность . . . . .	274
§ 61.	Непрерывные отображения и их свойства . . . . .	279
§ 62.	Гомеоморфные отображения . . . . .	282
§ 63.	Верхняя и нижняя границы числовых множеств или последовательностей. Верхний и нижний пределы числовых множеств или последовательностей . . . . .	287

## ПРОИЗВОДНЫЕ, ИНТЕГРАЛЫ И РЯДЫ

(И. П. Натансон)

Введение . . . . .	299
<b>Глава I. Производные . . . . .</b>	<b>303</b>
§ 1. Производная и дифференциал . . . . .	303
1. Задачи, приводящие к понятию производной . . . . .	303
2. Определение производной . . . . .	307
3. Дифференцируемость и непрерывность. Односторонние производные . . . . .	309
4. Производные простейших элементарных функций . . . . .	312
5. Дифференцирование обратных функций . . . . .	318
6. Правила комбинирования формул дифференцирования . . . . .	320
7. Дифференциал . . . . .	327
8. Производные и дифференциалы высшего порядка . . . . .	333
9. Частные производные и полный дифференциал . . . . .	337
§ 2. Важнейшие теоремы о производных . . . . .	339
10. Теоремы Ферма и Ролля . . . . .	339
11. Формулы Лагранжа и Коши. Правило Лопиталья . . . . .	342
12. Формула Тейлора . . . . .	346
13. Исследования П. Л. Чебышева и С. Н. Бернштейна . . . . .	353
§ 3. Применение дифференциального исчисления к исследованию функций . . . . .	354
14. Признаки постоянства и монотонности функции . . . . .	354
15. Экстремум функции . . . . .	359
16. Нахождение наибольшего и наименьшего значений функции на замкнутом промежутке . . . . .	363
<b>Глава II. Интегралы . . . . .</b>	<b>366</b>
§ 4. Неопределённые интегралы . . . . .	366
17. Основные понятия . . . . .	366
18. Интегрирование с помощью подстановки . . . . .	369
19. Интегрирование по частям . . . . .	371
20. Общие замечания по поводу интегрирования элементарных функций . . . . .	373
§ 5. Определённые интегралы . . . . .	377
21. Задачи, приводящие к понятию определённого интеграла . . . . .	377
22. Определённый интеграл . . . . .	380
23. Основные свойства интеграла . . . . .	385
24. Интеграл, как функция верхнего предела . . . . .	391
25. Вычисление определённого интеграла с помощью неопределённого . . . . .	393
26. Формула Валлиса . . . . .	398
27. Приближённое вычисление определённых интегралов . . . . .	400
§ 6. Приложения интегрального исчисления . . . . .	408
28. Вычисление площадей . . . . .	408
29. Вычисление объёмов . . . . .	411
30. Длина дуги кривой . . . . .	417
31. Площадь поверхности вращения . . . . .	418
32. Общие указания по поводу приложений интегрального исчисления и его связей с дифференциальным исчислением . . . . .	420

Глава III. Ряды . . . . .	425
§ 7. Ряды с постоянными членами . . . . .	425
33. Основные понятия . . . . .	425
34. Простейшие свойства рядов . . . . .	429
35. Положительные ряды . . . . .	431
36. Знакопередающиеся ряды . . . . .	437
37. Абсолютная сходимость . . . . .	440
38. Вопрос о перестановке членов ряда. Умножение рядов . . . . .	441
§ 8. Степенные ряды . . . . .	447
39. Промежуток сходимости . . . . .	447
40. Свойства суммы степенного ряда . . . . .	452
41. Разложение логарифма и составление таблиц логарифмов . . . . .	457
42. Разложение арктангенса и вычисление $\pi$ . . . . .	465
43. Общие замечания по поводу разложения функций в степенные ряды . . . . .	469
44. Биномиальный ряд . . . . .	472
45. Очерк аналитической теории тригонометрических функций . . . . .	481

### ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

(В. Л. Гончаров)

§ 1. Рациональные функции . . . . .	493
§ 2. Пределы. Ряды . . . . .	496
§ 3. Показательная функция. Синус и косинус . . . . .	500
§ 4. Выражение тригонометрических функций через показательную . . . . .	504
§ 5. Гиперболические и тригонометрические функции . . . . .	507
§ 6. Логарифм . . . . .	508
§ 7. Произвольная степень . . . . .	510
§ 8. Обратные тригонометрические и гиперболические функции . . . . .	511
§ 9. Производная . . . . .	513
§ 10. Интеграл . . . . .	517
§ 11. Приближение функций многочленами . . . . .	523
§ 12. Первообразная функция . . . . .	526
§ 13. Интеграл Коши . . . . .	532
§ 14. Понятие аналитической функции . . . . .	536
§ 15. Свойства аналитических функций . . . . .	539
§ 16. Геометрический смысл аналитических функций . . . . .	544
§ 17. Примеры конформных отображений . . . . .	547
Алфавитный указатель . . . . .	553